

Übungsblatt 9

Aufgabe P1 Zentraler Grenzwertsatz.

- a) Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_{10000} seien unabhängig und alle seien exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Wir definieren die Zufallsvariable X gemäß $X := \sum_{i=1}^{10000} X_i$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(9950 \leq X \leq 10200)$ approximativ unter Verwendung des Zentralen Grenzwertsatzes.
- b) Erfahrungsgemäß fliegt jeder Passagier, der einen Flug gebucht hat, nur mit Wahrscheinlichkeit 90% auch wirklich mit. Für den Flug eines Airbus mit 549 Sitzen wurden daher 600 Tickets verkauft. Es kann also passieren, dass der Flug überbucht ist, d.h. dass mehr Passagiere auftauchen, als Plätze da sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür näherungsweise.

Lösung: a) erstellt von Meier-Hans 15.12.2014, verändert Philipp König/Michael Fiedler 12.12.2016

a) Ist $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, dann folgt nach Vorlesung $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\lambda}$ und $\text{Var}[Y] = \frac{1}{\lambda^2}$. Entsprechend gilt hier $\mathbb{E}[X_1] = 1$ und $\text{Var}[X_1] = 1$. Per Definition gilt $\mathbb{E}[X] = 10000 \cdot \mathbb{E}[X_1] = 10000$ und $\text{Var}[X] = 10000 \cdot \text{Var}[X_1] = 10000 = 100^2$. Da X die Summe von vielen identisch verteilten und unabhängigen Zufallsvariablen ist, kann X näherungsweise als normalverteilt angenommen werden. Es gilt also

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(9950 \leq X \leq 10200) &= \mathbb{P}\left(\frac{9950 - 10000}{100} \leq \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\text{Var}[X]}} \leq \frac{10200 - 10000}{100}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} \leq \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\text{Var}[X]}} \leq 2\right) \approx \Phi(2) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \Phi(2) - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 0.9772 - (1 - 0.6915) = 0.6687.\end{aligned}$$

b) Sei X_i die Angabe, ob Passagier i mit fliegt ($X_i = 1$) oder nicht mit fliegt ($X_i = 0$). X_i ist Bernoulli verteilt mit Parameter 0.9 und die Anzahl der Personen ($Y_{600} = X_1 + \dots + X_{600}$), die mit fliegen, ist binomialverteilt mit Parametern 600 und 0.9. Nach Normalapproximation (Zentraler Grenzwertsatz) ist

$$Z_{600} := \frac{Y_{600} - \mathbb{E}[Y_{600}]}{\sqrt{\text{Var}[Y_{600}]}} = \frac{X - 540}{\sqrt{54}} \approx \frac{X - 540}{7.34847}$$

ungefähr standard normal-verteilt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{600} \geq 550) &= \mathbb{P}\left(\frac{Y_{600} - 540}{7.34847} \geq \frac{550 - 540}{7.34847}\right) = \mathbb{P}(Z_{600} \geq 1.36083) \\ &\approx 1 - \Phi(1.36083) \approx 1 - 0.9131 = 0.0869.\end{aligned}$$

Aufgabe P2 *Accept-Reject-Algorithmus.*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $B \in \mathcal{A}$ ein Ereignis mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Wir betrachten folgenden Algorithmus:

1. Generiere $x \sim \mathbb{P}$ gemäß Verteilung \mathbb{P} , d.h. $\mathbb{P}(x \in A) = \mathbb{P}(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
2. Falls $x \in B$, so akzeptiere $y := x$. Sonst lehne ab: Kehre zu Schritt 1 zurück.

Von einem eher mathematischen Standpunkt her gesehen, bedeutet das, dass die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots \sim \mathbb{P}$ unabhängig sind und für das Ergebnis $Y := X_T$ mit $T := \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in B\}$ gilt.

Zeigen Sie:

- a) $T \sim \text{Geo}(\mathbb{P}(B))$ und somit $\mathbb{E}[T] = 1/\mathbb{P}(B)$.
- b) $Y \sim \mathbb{P}(\cdot \mid B)$.

Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\{T = n\} = \{X_1 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\}$ und es gilt $\mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{P}(X_T \in A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \in A, T = n)$.

Lösung: a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(X_1 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B) = \mathbb{P}(B^c)^{n-1} \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) \cdot (1 - \mathbb{P}(B))^{n-1}$, also $T \sim \text{Geo}(p)$ mit $p := \mathbb{P}(B)$. Aus $T \sim \text{Geo}(p)$ folgt $\mathbb{E}[T] = 1/p = 1/\mathbb{P}(B)$.

b) Für $A \in \mathcal{A}$ ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \in A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \in A, T = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \in A, X_1 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in A \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B^c)^{n-1} \cdot \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap B) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(B^c)^n \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{1 - \mathbb{P}(B^c)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A \mid B). \end{aligned}$$

Aufgabe H1 *Cauchyverteilung.*

Eine Verteilung heißt Cauchyverteilung mit dem Parameter $\mu \in \mathbb{R}, \lambda > 0$, wenn sie die Dichte $g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - \mu)^2}$ hat.

- a) Im \mathbb{R}^2 wird auf der Geraden $\{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$ ein zufälliger Punkt $(1, Y)$ gewählt, sodass die Verbindungslinie zum Koordinatenursprung $(0, 0)$ mit der x -Achse einen auf dem Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ gleichverteilten Winkel einschließt. Zeigen Sie, dass Y cauchyverteilt mit den Parametern $\lambda = 1$ und $\mu = 0$ ist. *Hinweis:* Wenn X der Winkel ist, ist $X = \arctan(Y)$. Berechne zunächst die Verteilungsfunktion. Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass $\arctan'(x) = 1/(1 + x^2)$.

- b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Cauchyverteilung mit Parameter $\mu = 0$ und $\lambda = 1$ nicht existiert. *Hinweis: Man berechne die Ableitung von $\ln(1+x^2)$.*

Lösung: (a) Sei X der genannte Winkel. Daher ist $X = \arctan(Y)$ und X ist gleichverteilt auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. [1 Pkt] Die Verteilungsfunktion von Y ist deshalb:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\tan(X) \leq y) = P(X \leq \arctan(y)) = F_X(\arctan(y)) = \frac{\arctan(y) + \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{\arctan(y)}{\pi} + \frac{1}{2}$$

Damit ist

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{\arctan'(y)}{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2} \quad [2Pkt]$$

(b) Sei Y cauchyverteilt mit $\lambda = 1$ und $\mu = 0$. Da die Dichte symmetrisch in 0 ist, könnte man vermuten, dass der Erwartungswert 0 ist. Dies ist aber nicht der Fall:

$$\begin{aligned} E[|Y|] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{|x|}{1+x^2} dx = 2 \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{1}{\pi} \frac{x}{1+x^2} dx \geq 2 \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{\pi} \frac{x}{1+x^2} dx \\ &\geq 2 \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{\pi} \frac{x}{2x^2} dx \geq \sum_{a=2}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{a} = \infty \quad [3 Pkt] \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass die harmonische Reihe divergiert. Alternativ kann man dies auch so zeigen, wenn man die Stammfunktion von $\frac{x}{1+x^2}$ kennt (s. Hinweis):

$$E[|Y|] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{|x|}{1+x^2} dx = 2 \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{1}{\pi} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \log(1+a^2) = \infty \quad [altern. ebenso 3Pkt]$$

Aufgabe H2 Rechnen mit Verteilungen.

Sei X geometrisch verteilt mit einem Parameter $p \in (\frac{1}{2}, 1)$ und Y bernoulli verteilt mit (dem gleichem Parameter) p . Weiter seien X, Y unabhängig. Berechnen Sie folgende Erwartungswerte:

a) $\mathbb{E}[2^{X-3 \cdot Y}]$

b) $\mathbb{E}[X^Y]$

Lösung: a) Wir nutzen aus, dass mit X, Y unabhängig auch 2^{3X} und 2^{-Y} unabhängig sind (jeweils wurde eine Funktion auf X und Y angewandt, siehe Vorlesung). Damit gilt nach den Rechenregeln:

$$\mathbb{E}[2^{X-3Y}] = \mathbb{E}[2^{3X} 2^{-3Y}] = \mathbb{E}[2^{3X}] \mathbb{E}[2^{-3Y}] \quad (0.5 \text{ Punkte})$$

Da (man beachte, dass die Reihe konvergiert)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[2^{3X}] &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k p(1-p)^{k-1} = 2p \sum_{k=1}^{\infty} (2 \cdot (1-p))^{k-1} = 2p \sum_{k=0}^{\infty} (2 \cdot (1-p))^k \\ &= 2p \frac{1}{1-2(1-p)} = \frac{2p}{2p-1} \quad (1 \text{ Punkt}) \end{aligned}$$

und

$$\mathbb{E}[2^{-3Y}] = 2^{-3 \cdot 0} \mathbb{P}(Y=0) + 2^{-3 \cdot 1} \mathbb{P}(Y=1) = (1-p) + 1/8 \cdot p = 1 - 7p/8 \quad (1 \text{ Punkt})$$

hat man

$$\mathbb{E}[2^{X-3Y}] = \frac{2p}{2p-1} \cdot (1 - 7p/8) = \frac{8p-7p^2}{8p-4} \quad (0.5 \text{ Punkte})$$

b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^Y] &= \mathbb{E}[X^Y | \{Y=0\}] \mathbb{P}(\{Y=0\}) + \mathbb{E}[X^Y | \{Y=1\}] \mathbb{P}(\{Y=1\}) \\ &= \mathbb{E}[1 | \{Y=0\}] \mathbb{P}(\{Y=0\}) + \mathbb{E}[X | \{Y=1\}] \mathbb{P}(\{Y=1\}) \\ &= \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{E}[X] \mathbb{P}(Y=1) = (1-p) + \frac{1}{p} \cdot p = 2-p \quad (3 \text{ Punkte}) \end{aligned}$$

Alternativ

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^Y] &= \sum_{z \in W_{X^Y}} z \mathbb{P}(X^Y = z) = \sum_{z \in W_{X^Y}} z \sum_{y \in \{0,1\}, x \in \{1,2,\dots\}, z=x^y} \mathbb{P}(X=x, Y=y) \\ &= \sum_{z \in W_{X^Y}} \sum_{x \in \{1,2,\dots\}, z=x^0} z \mathbb{P}(X=x, Y=0) + \sum_{z \in W_{X^Y}} \sum_{x \in \{1,2,\dots\}, z=x^1} z \mathbb{P}(X=x, Y=1) = \\ &= \sum_{x \in \{1,2,\dots\}} 1 \cdot \mathbb{P}(X=x) \mathbb{P}(Y=0) + \sum_{x \in \{1,2,\dots\}, z=x^y} x \mathbb{P}(X=x) \mathbb{P}(Y=1) = \\ &= \mathbb{P}(Y=0) \sum_{x \in \{1,2,\dots\}} \mathbb{P}(X=x) + \mathbb{P}(Y=1) \sum_{x \in \{1,2,\dots\}} x \mathbb{P}(X=x) \\ &= (1-p) \cdot 1 + p \cdot \mathbb{E}[X] = (1-p) + p \frac{1}{p} = 2-p \end{aligned}$$

Aufgabe H3 Quantil-Transformation am Beispiel der Standardnormalverteilung.

Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ standardnormalverteilt, d.h. X besitzt die Verteilungsfunktion

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow (0,1), F_X(x) := \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

Da in diesem Falle die angegebene Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \rightarrow (0,1)$ eine Bijektion ist, ist die inverse Abbildung $F_X^{-1} : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F_X^{-1}(F_X(x)) = F_X(F_X^{-1}(x)) = x$ wohldefiniert. Sei nun $U \sim \text{Unif}(0,1)$ uniform auf $(0,1)$ verteilt. Man zeige, dass dann die Zufallsvariable $F_X^{-1}(U) \sim \mathcal{N}(0,1)$ standardnormalverteilt ist. Dies kann hilfreich sein, wenn man zum Beispiel mit dem Computer anhand eines Zufallsgenerators standardnormalverteilte Zufallsgrößen sampeln will.

Lösung: Da F_X strikt monoton wächst, wächst auch F_X^{-1} streng monoton. Für $x \in \mathbb{R}$ ist also $\mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x)) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{U \leq F_X(x)\}}] = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{u \leq F_X(x)\}} f_U(u) du = \int_0^{F_X(x)} du = F_X(x)$. Dabei ist $f_U : (0,1) \rightarrow [0,\infty)$, $f_U(u) := 1$ die Dichtefunktion von U .

Abgabe der Hausübungen (Aufgaben H1 bis H3): **Mittwoch, 11. Dezember, 16:00 Uhr**

Viel Erfolg! :)